Maths XP CS $n°5$ bis 30 Avril 2025 Thiaude P.
Durée : 25 min Les calculatrices et montres connectées sont interdites

Carl Friedrich GAUSS
(1777 – 1855)

Mathématicien, astronome et physicien allemand.

(image : source Wikipedia)

Problème Un grand classique

Le but du problème est l'étude des solutions de l'équation (E_n) *:* $z^n = \overline{z}$ *d'inconnue* $z \in \mathbb{C}$*,* n *entier naturel supérieur ou égal à* 2.

1. Étude d'un cas particulier

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
On considère $(E_2) : z^2 = \overline{z}$.

a. Montrer qu'avec ces notations on a l'équivalence :

$$z \text{ est solution de } (E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ xy = -\frac{1}{2}y \end{cases}$$

b. Montrer que (E_2) admet quatre solutions, en donner la forme algébrique.

c. On note A, B et C les points du plan complexe dont les affixes sont les solutions non nulles de (E_2). Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Étude du cas général

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note (E_n) l'équation $z^n = \overline{z}$.

a. Montrer que 0 est une solution de (E_n).

b. Montrer que : si z est une solution non nulle de (E_n), alors $|z| = 1$.

c. Montrer que les solutions non nulles de (E_n) sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{n+1} = 1$.

d. Résoudre (E_n) puis indiquer la nature du polygone dont les sommets ont pour affixes les solutions non nulles de (E_n).

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

Corrigé

Exercice 1 Un grand classique

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On considère $(E_2) : z^2 = \bar{z}$.

a. Montrer qu'avec les notations précédentes on a l'équivalence :

$$\boldsymbol{z \text{ est solution de } (E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ xy = -\frac{1}{2}y \end{cases}}$$

On a les équivalences : z est solution de $(E_2) \Leftrightarrow z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = x - iy$.
Or, deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, donc :

$$x^2 - y^2 + 2ixy = x - iy \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ xy = -\frac{1}{2}y \end{cases}$$

Conclusion :

$$\boldsymbol{z \text{ est solution de } (E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ xy = -\frac{1}{2}y \end{cases}}$$

b. Montrer que (E_2) admet quatre solutions, donner la forme algébrique de chacune d'entre-elles.

Résolvons le système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ xy = -\frac{1}{2}y \end{cases}$

• **1er cas : $y \neq 0$**

Sous cette hypothèse, on a les équivalences :

$$xy = -\frac{1}{2}y \Leftrightarrow x = \frac{-\frac{1}{2}y}{y} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}y \times \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

puis en remplaçant dans la première ligne du système :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} \Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ou \; y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On obtient finalement les deux couples : $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

• **2e cas : $y = 0$**

Sous cette hypothèse, on a les équivalences :

$$x^2 - 0^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 1$$

On obtient finalement les deux couples : $(0; 0)$ et $(1\ ;\ 0)$.

Conclusion :

$$(E_2) \text{ admet quatre solutions : } \boldsymbol{0, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

c. On note A, B et C les points du plan complexe dont les affixes sont les solutions non nulles de (E_2). Quelle est la nature du triangle ABC ?

Posons : $z_A = 1, z_B = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_C = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.

On a :

$$AB = |z_B - z_A| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right| = \left|-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

$$BC = |z_C - z_B = \left|-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|-2i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

$$CA = |z_A - z_C| = \left|1 - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{4}} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

On constate que $AB = BC = CA$ donc **le triangle $\boldsymbol{ABC}$ est équilatéral**.

2. Étude du cas général

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note (E_n) l'équation $z^n = \overline{z}$.

a. Montrer que 0 est une solution de (E_n).

$0^n = 0$ et $\overline{0} = 0$ donc $0^n = \overline{0}$ autrement dit 0 est une solution de (E_2).

b. Montrer que : si z est une solution non nulle de (E_n), alors $|z| = 1$.

Si z est une solution non nulle de (E_n), on a : $z \neq 0$ et $z^n = \bar{z}$, donc :
$|z^n| = |\bar{z}| \Leftrightarrow |z|^n = |z| \Leftrightarrow |z|^n - |z| = 0 \Leftrightarrow |z|(|z|^{n-1} - 1) = 0$
$\Leftrightarrow |z| = 0$ ou $|z|^{n-1} = 1$; or $z \neq 0$ donc $|z| \neq 0$, par conséquent : $|z|^{n-1} = 1$
ce qui revient à dire : $|z| = 1$

Conclusion : **si z est une solution non nulle de (E_n), alors $|z| = 1$.**

c. Montrer que les solutions non nulles de (E_n) sont les solutions de $z^{n+1} = 1$. En déduire les solutions de (E_n).

On a les équivalences :

$$z \text{ est une solution non nulle de } (E_n) \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z^n = \bar{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z \times z^n = z \times \bar{z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z^{n+1} = |z|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z^{n+1} = 1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \\ z^{n+1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow z^{n+1} = 1$$

Conclusion :
Les solutions non nulles de (E_n) sont les solutions de $z^{n+1} = 1$.

d. Résoudre (E_n) puis indiquer la nature du polygone dont les sommets ont pour affixes les solutions non nulles de (E_n).

Les solutions non nuls de (E_n) sont les solutions de $z_{n+1} = 1$, c'est-à-dire les racines $(n+1)$-ièmes de l'unité, ce sont donc les nombres $e^{ik\frac{2\pi}{n+1}}$, $k \in \{0; \ldots; n\}$.

Les solutions de (E_n) sont : 0 et les $n+1$ nombres $e^{ik\frac{2\pi}{n+1}}$ avec $k \in \{0; \ldots; n\}$.
Les points dont les affixes sont les solutions non nulles de (E_n) sont les sommets d'un polygone régulier à $(n+1)$ côtés.

utilisation commerciale interdite - copie autorisée avec indication OBLIGATOIRE de la source : mathsenclair.com Thiaude P.